

## Ficha Formativa de Matemática A – Geometria III

## Equação do plano e equação da reta no espaço

**Plano definido por um ponto e um vetor normal :**

Seja  $A(x_1, y_1, z_1)$  um ponto do plano e  $\vec{n} = (a, b, c)$  um vetor normal do plano:

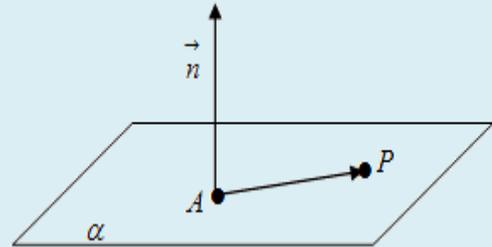
A equação do plano  $\alpha$  é dada por :

$$\vec{AP} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow a(x-x_1) + b(y-y_1) + c(z-z_1) = 0$$

conhecida por **equação cartesiana do plano**.

Desenvolvendo a equação  $a(x-x_1) + b(y-y_1) + c(z-z_1) = 0$  obtém-se uma equação do tipo

$$ax + by + cz + d = 0 \text{ conhecida por } \mathbf{equação\ geral\ do\ plano}.$$



**Exemplo:** Determina uma equação do plano que contém o ponto  $A(-1, 2, 1)$  e é perpendicular ao vetor

$$\vec{n} = (3, 1, 2)$$

**Resolução:**

$$\begin{aligned} \vec{AP} \cdot \vec{n} = 0 &\Leftrightarrow 3(x+1) + 1(y-2) + 2(z-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x + 3 + y - 2 + 2z - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x + y + 2z + 3 - 2 - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x + y + 2z - 1 = 0 \end{aligned}$$

**Plano definido por 3 pontos não colineares :**

**Modo de proceder:**

- Determinam-se dois vetores quaisquer, por exemplo  $\vec{AB}$  e  $\vec{AC}$ .
- Determina-se um vetor normal ao plano: 
$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (\dots) \Leftrightarrow \vec{n} = (a, b, c)$$
- Escreve-se a equação do plano:  $a(x-x_1) + b(y-y_1) + c(z-z_1) = 0$

**Exemplo:** Determina uma equação do plano ABC sendo  $A(2, -1, 1)$ ,  $B(0, 1, 1)$  e  $C(2, 3, 0)$ .

**Resolução:**

- Determinar dois vetores quaisquer:  $\vec{AB} = (-2, 2, 0)$  e  $\vec{AC} = (0, 4, -1)$ .
- o vetor  $\vec{n} = (a, b, c)$  é perpendicular ao plano sse  $\vec{n} \perp \vec{AB} \wedge \vec{n} \perp \vec{BC} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \wedge \vec{n} \cdot \vec{BC} = 0$

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{BC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (-2, 2, 0) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (0, 4, -1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + 2b = 0 \\ 4b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ c = 4b \end{cases}$$

Os vetores da forma  $\vec{n} = (b, b, 4b)$ ,  $b \neq 0$  são perpendiculares ao plano ABC.

Se  $b = 1$ , por exemplo, vem  $\vec{n} = (1, 1, 4)$ .

Assim, uma equação do plano é:

$$1(x-2) + 1(y+1) + 4(z-1) = 0 \Leftrightarrow x - 2 + y - 1 + 4z - 4 = 0 \Leftrightarrow x + y + 4z - 7 = 0 \Leftrightarrow$$

#### Casos particulares:

##### **Planos paralelos aos planos coordenados:**

Seja  $A(x_1, y_1, z_1)$  um ponto qualquer do plano

- **Plano paralelo ao plano xOy:** a equação do plano é do tipo:  $z = z_1$
- **Plano paralelo ao plano xOz:** a equação do plano é do tipo:  $y = y_1$
- **Plano paralelo ao plano yOz:** a equação do plano é do tipo:  $x = x_1$

**Exemplo:** Escreve uma equação do plano que contém o ponto  $A(1, 2, 3)$  e:

- a) é paralelo ao plano xOy ;
- b) é paralelo ao plano xOz ;
- c) é paralelo ao plano yOz .

#### **Resolução:**

- a)  $z = 3$
- b)  $y = 2$
- c)  $x = 1$

#### **Exercícios Propostos:**

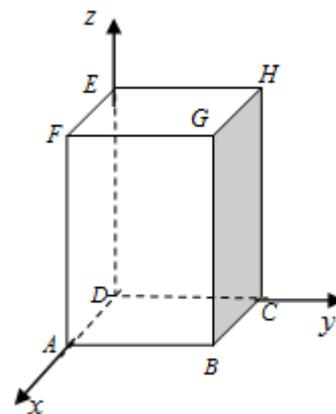
1. Escreve uma equação do plano:

- a) que contém o ponto  $A(0, 1, 0)$  e é perpendicular ao vetor  $\vec{u} = (2, -1, -3)$ .
- b) ABC, sendo  $A(0, 0, 1)$ ,  $B(1, 1, 0)$  e  $C(1, 0, 1)$ .
- c) que contém o ponto  $B(1, 0, 2)$  e é paralelo aos vetores  $\vec{u} = (1, 1, 0)$  e  $\vec{v} = (-1, 0, 2)$ .

2. Determina uma equação do plano que contém o ponto  $A(2, 3, 1)$  e

- a) é paralelo ao plano xOy ;
- b) é paralelo ao plano xOz ;
- c) é paralelo ao plano yOz .

3. Considera o plano  $\alpha$  de equação  $2x - y + 3z = 0$ .
- Indica as coordenadas de um vetor normal ao plano.
  - Indica um ponto do plano.
  - Verifica se o ponto  $A(0, 1, 4)$  pertence ao plano.
4. Considera o prisma quadrangular regular representado na figura, cuja área da base é  $25 \text{ cm}^2$  e o volume é  $175 \text{ cm}^3$ .



- Determina as coordenadas dos pontos A, C e H.
- Escreve a equação do plano que contém a face [EFGH].
- Escreve uma condição que defina a reta BG.
- Determina uma equação do plano mediador do segmento [AH].
- Determina uma equação da superfície esférica que tem por centro o ponto D e que passa por H.
- Determina uma equação do plano ACE.
- Determina uma equação do plano que contém o ponto G e:
  - é paralelo ao plano  $xOy$ ;
  - é paralelo ao plano  $xOz$ ;
  - é paralelo ao plano  $yOz$ .

### Equações da Reta no Espaço

#### Equação vetorial da reta:

Dados o ponto  $A(x_1, y_1, z_1)$  e o vetor,  $\vec{u} = (a, b, c)$  a equação vetorial da reta é:

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + \lambda (a, b, c), \lambda \in \mathbb{R}$$

**Exemplo:** A equação da reta que passa no ponto  $A(-1, 0, 2)$  e tem a direção do vetor  $\vec{u} = (1, 2, 3)$  é:

$$(x, y, z) = (-1, 0, 2) + \lambda (1, 2, 3), \lambda \in \mathbb{R}$$

#### Equações cartesianas da reta:

Dados o ponto  $A(x_1, y_1, z_1)$  e o vetor  $\vec{u} = (a, b, c)$ , as equações cartesianas da reta são:

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$$

**Exemplo:** As equações cartesianas da reta que passa por  $A(-1, 0, 2)$  e tem a direcção do vetor  $\vec{u} = (1, 2, 3)$  são:

$$\frac{x-(-1)}{1} = \frac{y-0}{2} = \frac{z-2}{3} \Leftrightarrow \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{3}$$

### Casos Particulares :

**1º CASO:** uma das coordenadas do vetor é nula. Por exemplo,  $\vec{u} = (0, b, c)$

Neste caso as equações são:

$$x = x_1 \wedge \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = x_1 \\ \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c} \end{cases}$$

**2º CASO:** duas das coordenadas do vetor são nulas. Por exemplo,  $\vec{u} = (0, 0, c)$

Neste caso as equações cartesianas da reta são:

$$x = x_1 \wedge y = y_1 \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \end{cases}$$

### **Exemplos:**

As equações cartesianas da reta que passa pelo ponto  $A(1, -1, 2)$  e tem a direcção do vetor  $\vec{u} = (0, 2, 3)$  são:

$$x = 1 \wedge \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{3} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 1 \\ \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{3} \end{cases}$$

As equações cartesianas da reta que passa pelo ponto  $A(1, -1, 2)$  e tem a direcção do vetor  $\vec{u} = (0, 0, 3)$  são:

$$x = 1 \wedge y = -1 \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

### **Outros exemplos:**

Ponto  $A(x_1, y_1, z_1)$ , vetor  $\vec{u} = (a, 0, c)$

Equações cartesianas da reta:  $y = y_1 \wedge \frac{x-x_1}{a} = \frac{z-z_1}{c}$  ou  $\begin{cases} y = y_1 \\ \frac{x-x_1}{a} = \frac{z-z_1}{c} \end{cases}$

### **Exemplos:**

Dados o ponto  $A(1, -1, 2)$  e o vetor  $\vec{u} = (2, 0, 3)$ , as equações são:

$$y = -1 \wedge \frac{x-1}{2} = \frac{z-2}{3} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = -1 \\ \frac{x-1}{2} = \frac{z-2}{3} \end{cases}$$

Dados o ponto  $A(1, -1, 2)$  e o vetor  $\vec{u} = (0, 2, 0)$ , as equações são:

$$x=1 \wedge z=2 \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x=1 \\ z=2 \end{cases}$$

Dados o ponto  $A(1, -1, 2)$  e o vetor  $\vec{u} = (1, 0, 0)$ , as equações são:

$$y=-1 \wedge z=2 \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y=-1 \\ z=2 \end{cases}$$

### Exercícios Propostos:

5. Considera num referencial o.n. Oxyz, o ponto  $A(1, 2, -1)$  e a reta  $r$  definida por:

$$(x, y, z) = (-2, 0, 4) + \lambda(3, -1, 2), \lambda \in \mathbb{R}$$

- Escreve as equações cartesianas da reta  $r$ .
- Determina as coordenadas do ponto de intersecção da reta  $r$  com o plano  $xOy$ .
- Determina uma equação da reta que passa pelo ponto  $A$  e tem a direcção do eixo  $Oz$ .

6. Considera num referencial o.n. Oxyz, o ponto  $A(-1, 1, 3)$  e a reta  $r$  definida por:

$$\frac{x+1}{-2} = y-2 = \frac{z-1}{3}$$

- Escreve uma equação vetorial da reta  $r$ .
- Determina as coordenadas do ponto de intersecção da reta  $r$  com o plano  $xOy$ .
- Determina as equações cartesianas da reta paralela ao eixo  $Oy$  e que passa pelo ponto  $A$ .

7. Escreve as equações vectoriais e as equações cartesianas da reta que passa por  $A(1, 3, 2)$  e tem a direcção dos vetores:

$$\text{a) } \vec{a} = (1, 2, 3) \qquad \text{b) } \vec{b} = (1, 0, 3) \qquad \text{c) } \vec{c} = (-1, 0, 0)$$

7. Considere as retas  $r$  e  $s$  definidas por:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+4}{-5} = \frac{2-z}{3} \qquad s: \begin{cases} x = \frac{z+3}{2} \\ y = 4 \end{cases}$$

- Indique um vetor director e dois pontos de cada uma das retas.
- Escreve a equação vetorial da reta  $s$ .
- Determina a intersecção da reta  $r$  com o plano  $yOz$ .